

بررسی مساله تناقض بریز در شبکه‌های حمل و نقلی

داود جمور

کارشناس ارشد مهندسی و برنامه‌ریزی حمل و نقل، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

d_jamour_63@yahoo.com

۱- مقدمه

تخصیص جریان ترافیک چهارمین و آخرین مرحله از فرآیند برنامه‌ریزی حمل و نقل می‌باشد که بعد از مراحل تولید، توزیع و تفکیک سفر قرار دارد و در آن تصمیم‌گیری افراد در انتخاب مسیر سفر مدل‌سازی می‌شود. در بین روش‌های موجود برای تخصیص جریان ترافیک، تعادل استفاده‌کننده و بهینه‌سازی سیستم از پرکاربردترین روش‌ها می‌باشند که در برنامه‌ریزی حمل و نقل به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در سال ۱۹۶۸، بریز مثالی از تخصیص جریان ترافیک ارائه نمود که نتیجه متناقضی را نمایش می‌داد. در این مثال، افزودن یک کمان به شبکه منجر به افزایش زمان سفر کل شبکه می‌شود. در حالی که بصورت طبیعی انتظار می‌رود با افزودن کمان به شبکه، زمان سفر کاهش یابد.

در این مقاله ابتدا مرور مختصری بر روش‌های مختلف تخصیص ترافیک در شبکه خواهیم داشت. سپس مفهوم تناقض بریز در شبکه‌های حمل و نقلی ارائه می‌گردد. پس از آن به بررسی و حل مساله تناقض بریز برای تخصیص تعادل استفاده‌کننده و بهینه‌سازی سیستم پرداخته می‌شود و در نهایت حالت‌های مختلف تقاضا که ممکن است تناقض بریز در شبکه رخ دهد، ارائه می‌گردد.

۲- مروری بر روش‌های تخصیص جریان ترافیک

روش‌های گوناگونی برای تخصیص جریان ترافیک از گذشته تاکنون مورد استفاده قرار گرفته است. تعداد زیادی از روش‌های قدیمی دارای ویژگی‌های نامطلوبی بودند و نیاز به جایگزینی آنها در کارهای بعدی احساس می‌شد. روش‌های تعادل استفاده‌کننده و بهینه‌سازی سیستم به دلیل ارائه یک جریان تعادلی در شبکه، بیش از سایر روش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این دو روش، تخصیص ترافیک بر اساس دو مفهوم مجزا صورت می‌گیرد.

در روش تعادل استفاده کننده انتخاب مسیر بر اساس مینیمم کردن هزینه تک تک استفاده کنندگان است، در حالی که در روش بهینه سازی سیستم، هدف مینیمم کردن زمان سفر کل شبکه می باشد. در ادامه روش های تخصیص همه یا هیچ، تخصیص جزئی، محدودیت ظرفیت، تعادل استفاده کننده، تعادل استفاده کننده تصادفی و بهینه سازی سیستم مورد بررسی قرار گرفته اند.

۲-۱- تخصیص همه یا هیچ^۱

در روش تخصیص همه یا هیچ، کل جریان ترافیک بین یک زوج مبدأ- مقصد، به کوتاهترین مسیری که مبدأ- مقصد را به هم متصل کرده است، اختصاص می یابد. این روش تخصیص غیر واقعی می باشد زیرا:

- ۱- تنها یک مسیر بین هر زوج مبدأ- مقصد مورد استفاده قرار می گیرد، در حالی که جریان ترافیک بین یک زوج مبدأ- مقصد می تواند از چند مسیر عبور نماید.
- ۲- در این روش زمان سفر در کمانها مقدار ثابتی بوده و با حجم جریان در کمان تغییری نمی کند.

۲-۲- روش تخصیص جزئی^۲

الگوریتم تخصیص جزئی برای تخصیص جریان ترافیک از یک پروسه تکراری استفاده می کند. در این روش در هر مرحله سهم ثابتی از تقاضای کل بر اساس روش همه یا هیچ تخصیص می یابد و بعد از هر گام زمان سفر در کمانها بر اساس حجم ترافیک در آنها به روز می شود. زمانی که مراحل الگوریتم به تعداد دفعات زیادی تکرار شود، جریان به تخصیص تعادلی نزدیک می شود. به هر حال این روش یک حل تعادلی ارائه نمی دهد.

۲-۳- روش محدودیت ظرفیت^۳

روش محدودیت ظرفیت تلاش می کند با استفاده از روش تخصیص همه یا هیچ و به روز رسانی زمان سفر در کمانها بر اساس تابع تراکم (که بیانگر ظرفیت کمان است)، یک حل تعادلی تقریبی ارائه دهد. روش محدودیت ظرفیت به یک حل تعادلی همگرا نمی شود و دارای این مشکل است که نتایج آن به تعداد خاصی تکرار وابسته است، به گونه ای که انجام یک تکرار بیشتر و یا کمتر تغییرات اساسی در نتایج این روش ایجاد می نماید.

۲-۴- روش تعادل استفاده کننده^۴

¹All or Nothing Assignment

²Incremental Assignment

³ Capacity Restraint

⁴ User Equilibrium

تخصیص تعادل استفاده کننده بر اساس اصل اول واردروپ^۱ بنا نهاده شده است و از یک پروسه تکراری برای دست یابی به یک جواب همگرا استفاده می کند. فرضیات اساسی این روش به صورت زیر می باشد:

- ۱- استفاده کنندگان از شبکه اطلاعات کامل در مورد مسیرهای شبکه دارند.
- ۲- استفاده کنندگان از شبکه مسیری را انتخاب می کنند که زمان سفر یا هزینه سفرشان را مینیمم کند.
- ۳- استفاده کنندگان از شبکه ارزیابی یکسانی از گزینه های موجود دارند.
- ۴- زمان سفر در هر کمان فقط تابعی از حجم ترافیک در آن کمان است و مستقل از حجم ترافیک در سایر کمان ها می باشد.
- ۵- توابع زمان سفر، توابعی مثبت و صعودی می باشند.

۲-۵- تعادل استفاده کننده تصادفی^۲

تعادل استفاده کننده تصادفی حالتی از تعادل استفاده کننده است که در آن فرض می شود استفاده کنندگان درک یکسانی از خصوصیات و ویژگی های مسیرهای شبکه ندارند. این روش در سال ۱۹۷۷ توسط داگانزو و شیفی^۳ ارائه شد. در این روش سفرهای بین هر زوج مبدأ- مقصد بر اساس این اصل که "ارزان ترین مسیر بیشترین سفر را جذب می کند"، در بین مسیرها تقسیم می شود.

این روش تعادلی نتایج واقعی تری نسبت به تعادل استفاده کننده قطعی ارائه می دهد، زیرا تعادل استفاده کننده تصادفی اجازه استفاده از مسیرهای با جذابیت کم را مانند مسیرهای با جذابیت بالا می دهد.

۲-۶- روش بهینه سازی سیستم^۴

تخصیص بهینه سازی سیستم بر اساس اصل دوم واردروپ^۵ بنا نهاده شده است و بر اساس آن جریان ترافیک به گونه ای به کمان های شبکه اختصاص می یابد که زمان سفر کل شبکه حداقل شود. در حقیقت این روش یک مدل رفتاری واقعی نیست، اما می تواند برای برنامه ریزان و مهندسان حمل و نقل مفید باشد، زیرا آنها تلاش می کنند ترافیک را به گونه ای مدیریت کنند که هزینه سفر در کل شبکه مینیمم بوده و به یک تعادل بهینه دست یابند.

¹Wardrop 's first principle

² Stochastic User Equilibrium(SUE)

³Daganzo and Sheffi (1977)

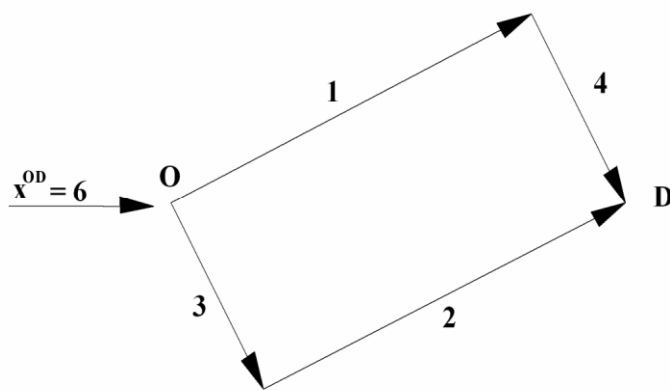
⁴ System Optimization

⁵Wardrop 's second principle

۳- مفهوم تناقض بریز

در سال ۱۹۶۸، بریز^۱ مثالی از تخصیص تعادلی جریان ترافیک ارائه نمود که نتیجه متناقضی را نمایش می‌داد. در این مثال، افزودن یک کمان به شبکه منجر به افزایش زمان سفر کل شبکه می‌شود. در حالی که بصورت طبیعی انتظار می‌رود، با افزودن کمان به شبکه زمان سفر کاهش یابد. این مسأله که در ادامه مورد بررسی قرار خواهد گرفت، به تناقض بریز^۲ شهرت یافت.

شبکه زیر را که از ۴ کمان و یک زوج مبدأ- مقصد تشکیل شده است، با روابط زمان سفر- حجم داده شده در نظر بگیرید.



$$t_1(x_1) = 50 + x_1$$

$$t_2(x_2) = 50 + x_2$$

$$t_3(x_3) = 10x_3$$

$$t_4(x_4) = 10x_4$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود شبکه دارای دو مسیر از O به D است و تقاضای جریان ترافیک ۶ واحد است. با کمی دقت در شبکه و بدون استفاده از روش‌های ریاضی، می‌توان جریان تعادل استفاده‌کننده را برای این شبکه محاسبه نمود. از آنجایی که روابط زمان سفر- حجم در دو مسیر کاملاً متقارن می‌باشد، می‌توان دریافت که نصف جریان ترافیک از هر کدام از مسیرها عبور خواهد کرد. بنابراین حجم جریان و زمان سفر در کمان‌های شبکه بصورت زیر خواهد بود:

$$x_{ij}: \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3 \text{ flow units}$$

$$t_{ij}: \quad t_1 = 53, \quad t_2 = 53, \quad t_3 = 30, \quad t_4 = 30 \text{ time units}$$

همچنین زمان سفر در مسیرها و زمان سفر در کل شبکه بصورت زیر خواهد بود:

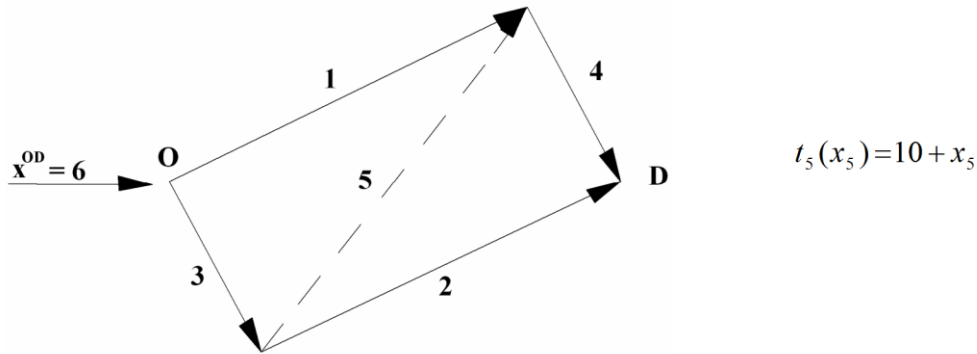
$$t_p^{OD}: \quad t_{1,4}^{OD} = 83, \quad t_{2,3}^{OD} = 83 \text{ time units}$$

$$t_{Total} = 498 \text{ (flow-time) units}$$

¹ Braess

² Braess' paradox

حال فرض کنید به شبکه قبلی یک کمان که دو گره میانی شبکه را به هم متصل می‌نماید، اضافه شود. در شکل، کمان اضافه‌شده (کمان شماره ۵) و تابع عملکرد آن نمایش داده شده است.



با اضافه شدن کمان جدید به شبکه، تعداد مسیرهای از O به D به سه مسیر افزایش می‌یابد. مسیرها و نام‌گذاری آنها بصورت زیر می‌باشد:

مسیر شماره ۱: شامل کمان‌های ۱ و ۴

مسیر شماره ۲: شامل کمان‌های ۲ و ۳

مسیر شماره ۳: شامل کمان‌های ۳، ۴ و ۵

در صورتی که جواب‌های تعادل استفاده‌کننده حالت قبل را بر شبکه جدید اعمال کنیم، جریان در کمان‌ها و زمان سفر در مسیرهای شبکه جدید بصورت زیر خواهد بود:

$$x_{ij}: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3, x_5 = 0 \text{ flow units}$$

$$t_p^{OD}: t_1^{OD} = 83, t_2^{OD} = 83, t_3^{OD} = 70 \text{ time units}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود زمان سفر در مسیر شماره (۳) که هیچ جریانی از آن عبور نمی‌کند، از زمان سفر در دو مسیر دیگر که مورد استفاده قرار گرفته‌اند کمتر است، بنابراین تعادل استفاده‌کننده در شبکه جدید برقرار نیست. زیرا بر اساس مفهوم تعادل استفاده‌کننده، زمان سفر در مسیرهای موازی استفاده‌شده باید با هم برابر بوده و از زمان سفر در مسیرهای استفاده‌نشده کمتر باشد. بنابراین باید جریان ترافیک به‌گونه‌ای تخصیص یابد که تعادل استفاده‌کننده در شبکه جدید برقرار گردد.

با استفاده از برابری زمان سفر در مسیرهای موازی و تعادل گره‌های شبکه، جریان تعادلی و زمان سفر در کمان‌های شبکه جدید بصورت زیر بدست می‌آید:

$$x_{ij}: x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 4, x_5 = 2 \text{ flow units}$$

$$t_{ij}: t_1 = 52, t_2 = 52, t_3 = 40, t_4 = 40, t_5 = 12 \text{ time units}$$

همچنین زمان سفر در مسیرها و زمان سفر در کل شبکه بصورت زیر خواهد بود:

$$t_p^{OD} : t_1^{OD} = t_2^{OD} = t_3^{OD} = 92 \text{ time units}$$

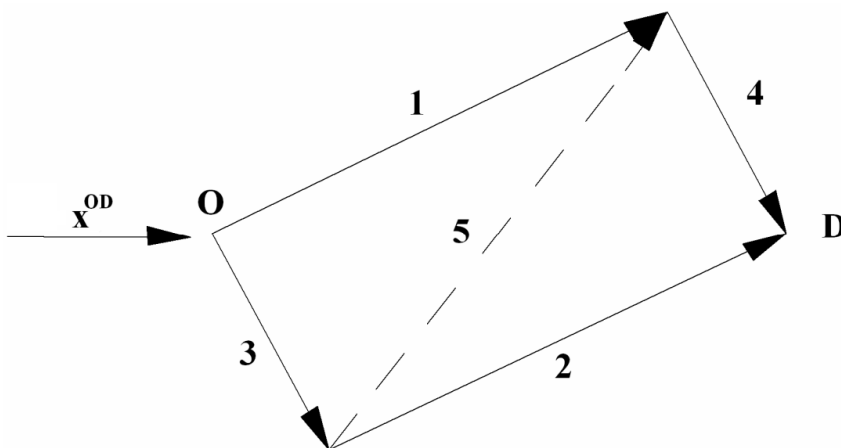
$$t_{Total} = 552 \text{ (flow - time) units}$$

همان گونه که ملاحظه می شود زمان سفر کل در شبکه جدید ۵۵۲ واحد خواهد بود، این در حالی است که قبل از اضافه کردن کمان به شبکه، زمان سفر کل شبکه ۴۹۸ واحد بدست آمد. بنابراین افزودن کمان به شبکه منجر به افزایش زمان سفر هر کدام از مسافران از ۸۳ به ۹۲ واحد و افزایش زمان سفر کل از ۴۹۸ به ۵۵۲ واحد می گردد. بر این اساس اضافه کردن کمان جدید به شبکه، برخلاف انتظار منجر به بدتر شدن شرایط برای تعادل استفاده کننده گردید. این مسأله به تناقض بریز معروف می باشد.

چنان چه شبکه مربوط به مسأله تناقض بریز (که در بالا مورد بررسی قرار گرفت) را برای جریان بهینه سازی سیستم حل کنیم، ملاحظه می شود که با افزودن کمان به شبکه هیچ تغییری در جریان بهینه سازی سیستم ایجاد نمی شود و جواب های تعادل سیستمی در شبکه بریز قبل و بعد از افزودن کمان جدید دقیقاً یکسان می باشند. بنابراین مفهوم تناقض بریز فقط برای تعادل استفاده کننده برقرار بوده و در مورد بهینه سازی سیستم صدق نمی کند.

۴- وضعیت شبکه بریز در حالت های مختلف تقاضا

در قسمت قبلی، شبکه بریز برای تخصیص تعادل استفاده کننده و بهینه سازی سیستم در حالتی که تقاضا برابر ۶ واحد بود، مورد بررسی قرار گرفت. حال شبکه بریز را پس از افزودن کمان جدید و در حالتی که تقاضا برابر مقدار کلی x^{OD} می باشد، در نظر بگیرید.



$$t_1(x_1) = 50 + x_1$$

$$t_2(x_2) = 50 + x_2$$

$$t_3(x_3) = 10x_3$$

$$t_4(x_4) = 10x_4$$

$$t_5(x_5) = 10 + x_5$$

با استفاده از برابری زمان سفر در مسیرهای موازی و تعادل گره های شبکه، تخصیص تعادل استفاده کننده در این

شبکه به صورت زیر خواهد بود:

$$x_3 = x_4 = \frac{x^{OD} + x_5}{2} \quad (1)$$

$$x_1 = x_2 = \frac{x^{OD} - x_5}{2}$$

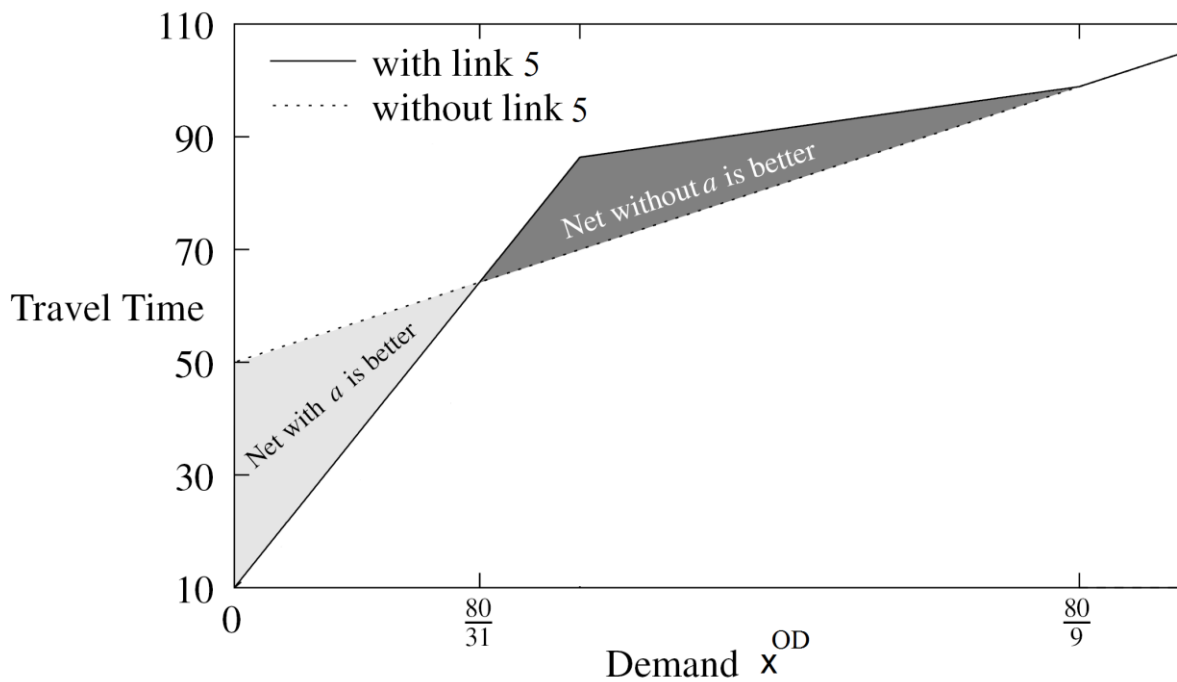
با انجام یکسری عملیات جبری، مشاهده می‌شود که حجم جریان در کمان اضافه شده برای مقادیر مختلف تقاضا از O به D به صورت زیر خواهد بود:

$$x_5 = \begin{cases} 0 & , \text{if } \frac{80 - 9x^{OD}}{13} < 0 \\ \frac{80 - 9x^{OD}}{13} & , \text{if } 0 < \frac{80 - 9x^{OD}}{13} < x^{OD} \\ x^{OD} & , \text{if } x^{OD} < \frac{80 - 9x^{OD}}{13} \end{cases} \quad (2)$$

با محاسبه جریان در کمان ۵، می‌توان بر اساس رابطه (۱) به محاسبه حجم ترافیک در سایر کمان‌ها پرداخت. در شکل (۱) وضعیت تعادل استفاده‌کننده در شبکه بریز پس از اضافه شدن کمان ۵، نمایش داده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، ۳ وضعیت در شکل نمایان است:

$$0 < x^{OD} < \frac{80}{31} \quad (1)$$

در این حالت جریان ترافیک فقط از کمان‌های ۳، ۴ و ۵ عبور می‌کند و کمان‌های ۱ و ۲ مورد استفاده قرار نمی‌گیرد (حالت سوم در رابطه ۲). این دقیقاً همان حالتی است که افزودن کمان جدید سبب بهبود وضعیت تعادل استفاده‌کننده می‌شود. یعنی زمان سفر کل شبکه در این حالت کمتر از زمان سفر قبل از اضافه شدن کمان ۵ می‌باشد.



شکل (۱). وضعیت تعادل استفاده کننده در شبکه بریز پس از اضافه شدن کمان ۵

$$\frac{80}{31} < x^{OD} < \frac{80}{9} \quad (۲)$$

در این حالت اضافه شدن کمان جدید سبب بدتر شدن وضعیت تعادل استفاده کننده نسبت به حالت قبل از آن شده است. به عبارت دیگر زمان سفر کل شبکه در این حالت بیشتر از زمان سفر قبل از اضافه شدن کمان ۵ می باشد و این دقیقاً همان حالتی است که تناقض بریز در شبکه اتفاق می افتد.

$$x^{OD} > \frac{80}{9} \quad (۳)$$

در این حالت کمان جدید (کمان شماره ۵) مورد استفاده قرار نمی گیرد و حجم جریان در آن صفر است. این وضعیت کاملاً مشابه حالت قبل از اضافه شدن کمان جدید می باشد (حالت اول در رابطه ۲). زمان سفر در این حالت با قبل از اضافه شدن کمان هیچ تفاوتی نمی کند.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی مساله تناقض بریز در شبکه های حمل و نقلی پرداخته شد. بدین منظور دو روش پرکاربرد تخصیص جریان ترافیک یعنی تخصیص تعادل استفاده کننده و بهینه سازی سیستم، در شبکه بریز مورد بررسی قرار گرفت و ملاحظه گردید که تناقض بریز فقط در روش تعادل استفاده کننده اتفاق می افتد و در مورد تخصیص بهینه سازی سیستم مصداق ندارد.

بررسی حالت های مختلف تقاضای سفر در شبکه بریز حاکی از آن است که، تناقض بریز فقط در محدوده خاصی از تقاضا رخ می دهد. در واقع برای حالت های مختلف تقاضا، شبکه بریز جواب های مختلفی را بدست می دهد و این گونه نیست که همواره در شبکه بریز تناقض رخ دهد. به گونه ای که حتی برای بعضی مقادیر تقاضا، کمان اضافه شده نتایج بهتری نسبت به قبل از اضافه شدن کمان بدست می دهد.

۶- مراجع

1. Bloy, K. "An Investigation into Some Aspects of Braess'Paradox" , Vela VKE Consulting Engineers, 2006.
2. Gawron, C., "Simulation-Based Traffic Assignment, Computing User Equilibriain Large Street Networks," koln, 1998.
3. Lin, H. and T. Roughgarden, "Stronger Bounds on Braess's Paradox and the Maximum Latency of Selfish Routing", 2011.
4. Mathew, T. V. and K.V. Krishna, "Introduction to Transportation Engineering", Chapter 10, Traffic Assignment, NPTEL, 2007.
5. Sheffi, Y., "Urban Transportation Network: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods," Massachusetts Institute of Technology, 1985.
6. TransCAD Program, Planning Help. Vol. 1.